



گزینه ۳

۱

گام اول

$$\begin{cases} \theta_1 = 20^\circ C \\ R_1 = 50 \Omega \end{cases} \leftarrow \text{الف) مقاومت سیم در دمای } 20^\circ \text{ درجه سلسیوس } 50 \Omega \text{ است}$$

$$\begin{cases} \theta_2 = 100^\circ C \\ R_2 = ? \Omega \end{cases} \leftarrow \text{ب) مقاومت این سیم در دمای } 100^\circ \text{ درجه سلسیوس چند اهم می شود؟}$$

گام دوم

تغییرات مقاومت بر اثر تغییر دما، از رابطه زیر به دست می آید:

$$\begin{cases} R_2 = R_1 (1 + \alpha \Delta \theta) \\ \alpha = 4 \times 10^{-3} K^{-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_2 = 50 (1 + 4 \times 10^{-3} \times (100 - 20)) = 51/6 \Omega$$

گزینه ۳

۲

گام اول

الف) مقاومت درونی باتری 2Ω ← $r = 2 \Omega$

ب) نسبت $\frac{V}{\epsilon}$ برابر $0/8$ ← $\frac{V}{\epsilon} = 0/8$

ج) آمپرسنج جریان $0/8$ آمپر را نشان می دهد ← $I = 0/8 A$

د) اگر کلید را قطع کنیم ← $I = 0$

گام دوم

با قطع کلید، ولتسنج نیروی محرکه مولد را نشان می دهد؛ پس کافی است نیروی محرکه مولد (ϵ) را به دست آوریم. بنابراین باتوجه به دو رابطه زیر مقدار ϵ برابر است با:

$$V = \epsilon - Ir \Rightarrow \frac{V}{\epsilon} = \frac{\epsilon - Ir}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow 0/8 = \frac{\epsilon - 0/8 \times 2}{\epsilon} \Rightarrow 0/8 \epsilon = \epsilon - 1/6 \Rightarrow \epsilon = 8V$$

رابطه بین مقاومت یک رسانای فلزی و تغییرات دمای آن به صورت زیر است:

$$R = R_0 \times (1 + \alpha \Delta\theta)$$

چون جریان عبوری از مقاومت ثابت است، بنابراین نمودار اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت بر حسب تغییرات دمای آن خط راست می‌باشد. در لحظاتی که تغییرات دما برابر با صفر و $100^\circ C$ است، داریم:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1 + \alpha \Delta\theta_2}{1 + \alpha \Delta\theta_1} \xrightarrow[\Delta\theta_2 = 100^\circ C, V_2 = 2/4V]{\Delta\theta_1 = 0, V_1 = 2V} \frac{2/4}{2} = 1 + 100\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{0/2}{100} = 2 \times 10^{-3} \left(\frac{1}{K}\right)$$

طبق رابطه $R = \rho \frac{l}{A}$ ، بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقاومت متناسب با بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین نسبت $\frac{l}{A}$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{R_{\max}}{R_{\min}} = \frac{l_{\max}}{l_{\min}} \times \frac{A_{\max}}{A_{\min}}$$

$$\xrightarrow[A_{\max} = 24cm^2, A_{\min} = 8cm^2]{l_{\max} = 6cm, l_{\min} = 2cm} \frac{R_{\max}}{R_{\min}} = \frac{6}{2} \times \frac{24}{8} = 9$$

باتوجه به متن کتاب درسی، چنانچه میدان الکتریکی به یک قطعه فلزی اعمال کنیم، حرکت کاتوره‌های الکترون‌ها قدری تغییر می‌کند و با سرعتی موسوم به سرعت سوق در خلاف جهت میدان درون رسانا حرکت می‌کنند.

جرم سیم در هر دو حالت یکسان است، بنابراین حجم سیم‌ها در دو حالت یکسان است و داریم: (سیم با سطح مقطع دایره‌ای را با اندیس (۱) و سیم با سطح مقطع مربعی را با اندیس (۲) نشان می‌دهیم)

$$V_1 = V_2 \Rightarrow L_1 A_1 = L_2 A_2 \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

$$\Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{a^2}{\frac{\pi a^2}{4}} \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{4}{\pi}$$

باتوجه به رابطه بین ویژگی‌های فیزیکی سیم و مقاومت الکتریکی آن، داریم:

$$R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{L_1}{L_2} \times \frac{A_2}{A_1}$$

$$\xrightarrow[\frac{L_1}{L_2} = \frac{4}{\pi}]{\frac{A_2}{A_1} = \frac{4}{\pi}} \frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2$$

ابتدا اندازه هر مقاومت کربنی را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$R = \overline{ab} \times 10^n$$

$$\Rightarrow R_1 = 12 \times 10^3 \Omega, R_2 = 36 \times 10^3 \Omega$$

در مدار تک حلقه، از مقاومت‌های R_1 و R_2 جریان یکسانی می‌گذرد؛ بنابراین طبق قانون اهم داریم:

$$V = IR \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{IR_2}{IR_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{36 \times 10^3}{12 \times 10^3} = 3$$

ابتدا بار الکتریکی هر یک از کره‌ها را بعد از بستن کلید حساب می‌کنیم. دقت کنید، چون کره‌ها مشابه‌اند، طبق اصل پایستگی بار الکتریکی، بعد از تماس، بار آنها مشابه و نصف مجموع بارهای قبل از تماس آنها است.

$$q'_A = q'_B = \frac{q_A + q_B}{2} \xrightarrow{q_A=20 \mu C, q_B=12 \mu C} q'_A = q'_B = \frac{20 + 12}{2} = 16 \mu C$$

اکنون مقدار بار شارش‌شده بین دو کره را حساب می‌کنیم و سپس تعداد الکترون‌ها را به دست می‌آوریم.

$$\Delta q = q'_B - q_B = 16 - 12 = 4 \mu C$$

$$n = \frac{q}{e} = \frac{4 \times 10^{-6}}{1.6 \times 10^{-19}} \Rightarrow n = 2.5 \times 10^{13} \text{ الکترون}$$

چون همواره جهت حرکت خودبه‌خودی الکترون‌ها از پتانسیل الکتریکی کمتر به طرف پتانسیل الکتریکی بیشتر است، الکترون‌ها از کره B به طرف کره A جابه‌جا می‌شوند. دقت کنید، چون بار الکتریکی هر دو کره مثبت و کره‌ها مشابه‌اند، کره‌ای که در ابتدا بار الکتریکی کمتری دارد، پتانسیل الکتریکی آن نیز کمتر است.

جریان عبوری از مدار را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{r_1 + r_2 + R} \xrightarrow{\varepsilon_1 = \varepsilon_2} I = \frac{2\varepsilon_2}{r_1 + r_2 + R}$$

از طرف دیگر برای مولد ε_2 می‌توان نوشت:

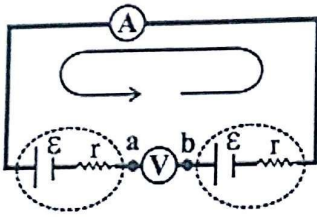
$$V_2 = \varepsilon_2 - r_2 I \xrightarrow{V_2=0} 0 = \varepsilon_2 - r_2 \times \frac{2\varepsilon_2}{r_1 + r_2 + R}$$

$$\Rightarrow r_2 \times \frac{2\varepsilon_2}{r_1 + r_2 + R} = \varepsilon_2$$

$$\Rightarrow 2r_2 = r_1 + r_2 + R \Rightarrow R = r_2 - r_1$$

ولت‌سنج ایده‌آل به عنوان مقاومت بی‌نهایت، مانع عبور جریان می‌شود؛ بنابراین آمپرسنج ایده‌آل عدد صفر را نشان می‌دهد. برای تعیین عددی که ولت‌سنج ایده‌آل نشان می‌دهد مدار را مطابق شکل می‌پیماییم تا اختلاف پتانسیل بین نقاط a و b را بیابیم، داریم:

$$V_b - \varepsilon - \varepsilon = V_a \Rightarrow V_b - V_a = 2\varepsilon$$



گزینه ۳

۱۱

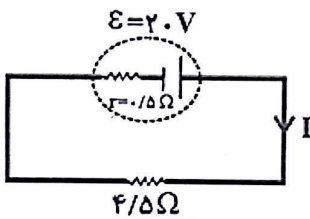
ابتدا نیروی محرکه مولد و مقاومت درونی آن را محاسبه می‌کنیم، داریم:

$$V = \varepsilon - Ir \Rightarrow \begin{cases} 20 = \varepsilon - (r \times 0) \\ 0 = \varepsilon - (r \times 40) \end{cases} \Rightarrow \varepsilon = 20V, r = 0.5 \Omega$$

حال با استفاده از رابطه جریان در مدار تک‌حلقه، داریم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} = \frac{20}{4/5 + 0.5} \Rightarrow I = 4A$$

$$V = \varepsilon - Ir = IR = 4 \times 4/5 \Rightarrow V = 18V$$



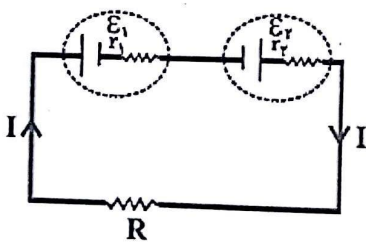
گزینه ۱

۱۲

چون $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ است، جهت جریان را مولد ε_2 تعیین می‌کند؛ بنابراین با بستن کلید k ، جریانی ساعت‌گرد در مدار برقرار می‌شود. آمپرسنج ایده‌آل در شاخه اصلی مدار قرار دارد؛ بنابراین جریان اصلی مدار را نشان می‌دهد. داریم:

$$I = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R + r_1 + r_2} = \frac{12 - 8}{1 + 1 + 1} = 0.4A$$

باتوجه به جهت جریان مدار، مولد ε_1 ضد محرکه است؛ در نتیجه اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر است با:



$$V = \varepsilon_1 + Ir_1 = 8 + 0.4(1) = 8.4V$$

گزینه ۱

۱۳

در دماسنج‌های مقاومتی، از پلاتین استفاده می‌شود. در مقاومت‌های ترکیبی از کربن، نیم‌رساناها و فیلم‌های نازک فلزات استفاده می‌شود. در استانداردهای مهندسی، سیم‌ها را برحسب قطر و مساحت مقطع آنها نمره‌بندی می‌کنند.

چون $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ است، جریان در مدار به صورت ساعت گرد است. بنابراین داریم:

$$I = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R_1 + R_2 + r_1 + r_2} = \frac{20 - 5}{3 + 2/5 + 1 + 1} \Rightarrow I = 2 A$$

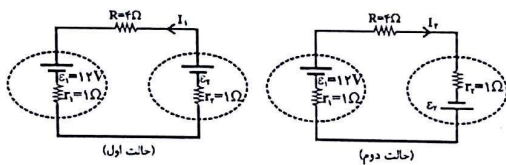
حال می‌توان نوشت:

$$V_a - \varepsilon_1 - I r_1 = V_b \Rightarrow V_b - V_a = -5 - 2 \times 1 \Rightarrow V_b - V_a = -7 V$$

$$V_c - I r_2 + \varepsilon_2 = V_d \Rightarrow V_c - V_d = -20 + 2 \times 1 \Rightarrow V_c - V_d = -18 V$$

در ابتدا مولدهای ε_1 و ε_2 به صورت مخالف بسته شده‌اند. وقتی جهت مولد ε_2 عوض می‌شود، جهت نیروی محرکه این دو مولد یکسان می‌شود و جریان در مدار حتماً به صورت ساعت گرد خواهد بود. بنابراین در ابتدا جریان در مدار به صورت پادساعت گرد بوده و در نتیجه $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$I_1 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R + r_1 + r_2} \Rightarrow 1 = \frac{\varepsilon_2 - 12}{4 + 1 + 1} \Rightarrow \varepsilon_2 = 18 V$$





گزینه ۴

۱

اگر $A = (2, 3)$ و $B = (-4, -1)$ فرض شوند، آنگاه مختصات نقطه M (وسط پاره خط AB) برابر است با:

$$x_M = \frac{-4 + 2}{2} = -1, \quad y_M = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

همچنین داریم:

$$m_{AB} = \frac{-1 - 3}{-4 - 2} = \frac{2}{3}$$

اگر خط d ، محور تقارن بازتاب مورد نظر باشد، آنگاه $m_d = -\frac{3}{2}$ و داریم:

$$d: y - 1 = -\frac{3}{2}(x + 1) \Rightarrow 3x + 2y = -1$$

گزینه ۱

۲

می‌دانیم که انتقال شیب را حفظ می‌کند، لذا $d \parallel d'$ است پس شیب‌های دو خط d و d' برابر هستند، در نتیجه:

$$\begin{cases} d: 3x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = -3x + 1 \Rightarrow m_d = -3 \\ d': 2x - ay + b = 0 \Rightarrow ay = 2x + b \Rightarrow m_{d'} = \frac{2}{a} \Rightarrow \frac{2}{a} = -3 \Rightarrow a = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

گزینه ۴

۳

بردار انتقال $\vec{u} = (a, a) \Rightarrow$ ضابطه انتقال $T(x, y) = (x + a, y + a)$

$$T(x, y) = (x', y') \Rightarrow (x + a, y + a) = (x', y')$$

$$\Rightarrow (x = x' - a, y = y' - a)$$

$$D': 2(x' - a) + 3(y' - a) - 10 = 0$$

$$\xrightarrow{x'=0, y'=0} a = -2 \Rightarrow \vec{u} = (-2, -2)$$

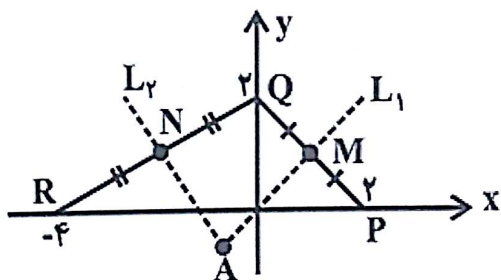
$$\Rightarrow T(x, y) = (x - 2, y - 2)$$

گزینه ۲

۴

نقطه $(2, 1)$ روی خط $y = 3 - x$ واقع است و بازتاب آن نسبت به خط بر خودش منطبق می‌شود، پس پاسخ نقطه $(2, 1)$ است. نکته: در حالت کلی برای به دست آوردن قرینه نقطه A نسبت به خط d ، معادله خط گذرا از A و عمود بر d را می‌نویسیم و محل تقاطع آن را با خط d به دست می‌آوریم (A'). قرینه A نسبت به خط d ، همان قرینه A نسبت به A' است.

نکته: اگر P و Q دوران یافته هم حول نقطه A باشند، آنگاه عمودمنصف PQ از A می‌گذرد. مطابق شکل نقطه A محل برخورد عمودمنصف‌های PQ و QR است.



$$m_{PQ} = -1 \Rightarrow m_1 = 1, M(1,1) \in L_1 \Rightarrow L_1: y = x$$

$$m_{QR} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_2 = -2, N(-2,1) \in L_2 \Rightarrow L_2: y - 1 = -2(x + 2)$$

$$\begin{cases} L_1: y = x \\ L_2: y = -2x - 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} A(-1, -1) \Rightarrow x_A + y_A = -2$$

دو نقطه از خط A را در نظر می‌گیریم:

$$x - 2y = 7 \Rightarrow A \begin{vmatrix} 7 \\ 0 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 5 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{T} A' \begin{vmatrix} 1 \\ 9 \end{vmatrix}, B' \begin{vmatrix} 2 \\ 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{معادله خط}} l': y = -2x + 11$$

محل تلاقی دو خط l و l' به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x - 2y = 7 \\ y = -2x + 11 \end{cases} \Rightarrow x - 2(-2x + 11) = 7 \Rightarrow 5x - 22 = 7$$

$$\Rightarrow x = \frac{29}{5} = 5.8$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله دوم}} y = -2(5.8) + 11 = -0.6$$

پس $x > 0$ و $y < 0$ و در ربع چهارم است.

$$(X, Y) = T(x, y) = (y - 2, 2x - 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = y - 2 \Rightarrow y = X + 2 \\ Y = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{Y+1}{2} \end{cases}$$

$$2x - 3y = 6 \Rightarrow 2\left(\frac{Y+1}{2}\right) - 3(X+2) = 6$$

$$\Rightarrow Y + 1 - 3X - 6 = 6 \Rightarrow Y - 3X = 11$$

در بین نقاط داده شده، تنها نقطه $(-2, 5)$ در معادله خط صدق می‌کند.

$$T(x, y) = (x - 1, 2y) : \begin{cases} X = x - 1 \\ Y = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ y = \frac{Y}{2} \end{cases}$$

با جایگذاری این مقادیر در معادله خط D داریم:

$$D' : 2(X + 1) + 3\left(\frac{Y}{2}\right) = 7 \Rightarrow 2X + 2 + \frac{3Y}{2} = 7 \Rightarrow D' : 4X + 3Y = 10$$

در بین گزینه‌ها، فقط نقطه (1, 2) روی خط واقع است.

نکته: ضابطه انتقال با بردار (h, k) عبارت است از: $T(x, y) = (-y, x)$ ضابطه دوران 90° حول مبدأ مختصات است. دوران یک ایزومتري است و مساحت شکل‌ها را تغییر نمی‌دهد، پس مساحت شکل تصویر همان مساحت مستطیل ABCD است:

$$S_{A'B'C'D'} = S_{ABCD} = (4 - 2)(6 - 1) = 10$$

نکته: ضابطه انتقال با بردار (h, k) عبارت است از: $T(x, y) = (x + h, y + k)$ اگر مختصات جدید را با (X, Y) نمایش دهیم، داریم:

$$(X, Y) = T(x, y) = (x + 2, y - 3) \Rightarrow \begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y + 3 \end{cases}$$

با جایگذاری این مقادیر در معادله خط $y = -x$ (نیمساز ربع دوم و چهارم) داریم:

$$Y + 3 = -(X - 2) \Rightarrow Y = -X - 1$$

بنابراین عرض از مبدأ این خط برابر -۱ است.

$$AB = \sqrt{(0 - 6)^2 + (-4 - 0)^2} = \sqrt{52}$$

$$AC = \sqrt{(0 - 6)^2 + (0 - 0)^2} = 6$$

$$BC = \sqrt{(0 - 0)^2 + (0 + 4)^2} = 4$$

واضح است که $AC^2 + BC^2 = AB^2$ ، پس مثلث ABC قائم‌الزاویه است. از طرفی تبدیل T یک انتقال است و انتقال مقدار مساحت را تغییر نمی‌دهد و چون مثلث ABC قائم‌الزاویه و طول‌های اضلاع قائمه ۶ و ۴ است، پس:

$$S_{ABC} = \frac{6 \times 4}{2} = 12$$

ابتدا تبدیل یافته خط L تحت تبدیل T را به دست می‌آوریم:

$$T(x, y) = (x - 1, y + 1) \Rightarrow \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

$$T(L) = L' \Rightarrow (y' - 1) - (x' + 1) = 0$$

$$\Rightarrow y' - x' - 2 = 0 \Rightarrow L' : y - x - 2 = 0$$

$$\begin{cases} d : y + x = 0 \\ L' : y - x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow d \cap L' = (-1, 1)$$

نقطه ثابت یک خط در یک تبدیل، نقطه‌ای است که بر تصویر خود منطبق باشد، بازتاب محوری، هر نقطه محور را روی خودش تصویر می‌کند؛ بنابراین، کافی است نقطه تلاقی خط D را با محور I پیدا کنیم.

$$\begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

بنابراین $A(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ، نقطه ثابت موردنظر است.

نکته: ضابطه انتقال با بردار (h, k) ، به صورت $T(x, y) = (x + h, y + k)$ است. با استفاده از نکته بالا داریم:

$$T(A) = B \Rightarrow T(\frac{1}{3}, -1) = (\frac{1}{3} + h, -1 + k) = (3, 2)$$

$$\Rightarrow h = 1, k = 3 \Rightarrow T(x, y) = (x + 1, y + 3)$$

نکته: بازتاب نقطه (x, y) نسبت به خط $x = \alpha$ عبارتست از: $(2\alpha - x, y)$
 نکته: بازتاب نقطه (x, y) نسبت به خط $x = \beta$ عبارتست از: $(x, 2\beta - y)$
 باتوجه به نکته بالا، بازتاب نقطه $A(3, -2)$ نسبت به خط $x = -1$ عبارتست از:

$$A'(-2 - 3, -2) = (-5, -2)$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.